



El significado de geometría dinámica lo podemos resumir diciendo que se trata de un programa con una serie de elementos u objetos elementales (puntos, segmentos, circunferencias, polígonos, etc.), a partir de los cuales es posible construir nuevos objetos, así como establecer relaciones entre ellos, de manera que al cambiar las condiciones de los objetos iniciales, se mantengan las relaciones existentes entre ellos, previamente establecidas a través de un conjunto de herramientas disponibles.

Cabri Géomètre, Geómetra, Cinderella, Regla y compás, KGeo, Dr. Genio o

GeoGebra son algunos de estos programas con características similares en cuanto a la forma de trabajar, pero con diferencias en cuanto al conjunto de herramientas que ofrecen y en las posibilidades para establecer o construir relaciones entre los distintos objetos.

Con un programa de geometría dinámica se pueden construir distintos objetos de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelarán las relaciones existentes en la figura construida; además, permitirá la transformación de los objetos que la componen, actualizando las relaciones existentes con facilidad y rapidez.

El siguiente material intentará familiarizarnos con uno de estos programas, como es *GeoGebra*, cuyo proyecto se inició en el 2001 en el curso de la tesis de maestría de *Markus Hohenwarter* y avanzó hacia la tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, *GeoGebra* continúa su desarrollo en varias Universidades, siendo sus desarrolladores *Markus Hohenwarter, Michael Borchers* e *Yves Kreis*, contando con contribuciones de distintos países.

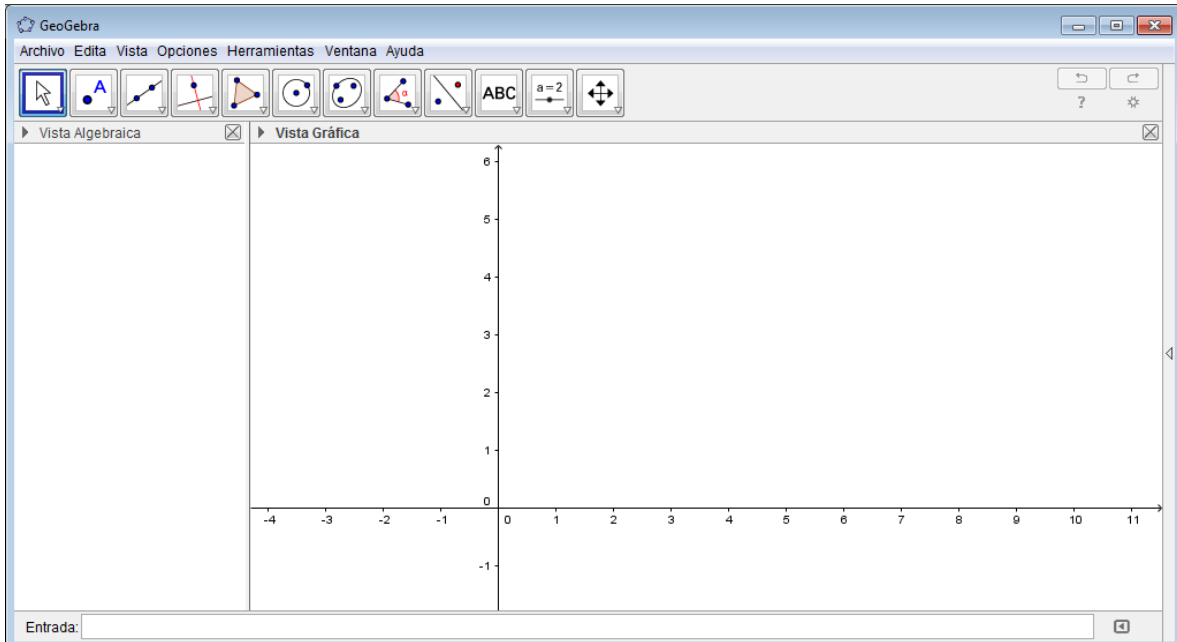
La utilización de un programa de geometría dinámica permitirá abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

GeoGebra es un programa sencillo y fácil de utilizar, lo que permitirá que, desde el primer instante, sea posible realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece.

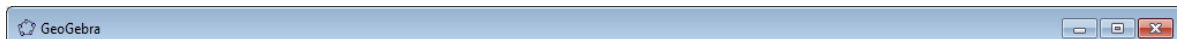
INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DINÁMICA

LA VENTANA DE TRABAJO DE GEOGEBRA

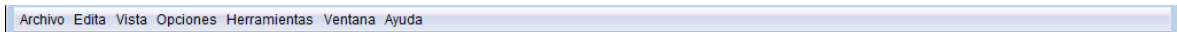
La pantalla inicial de *GeoGebra* presenta el siguiente aspecto, y en ella encontramos los elementos siguientes:



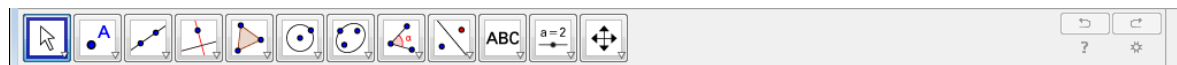
- **Barra de título:** contiene el nombre del programa y el nombre del archivo abierto.



- **Barra de menús:** contiene diferentes menús desplegables que facilitan el trabajo con archivos y determinan la configuración del programa. Los menús corresponden a **Archivo**, **Edita**, **Vista**, **Opciones**, **Herramientas**, **Ventana** y **Ayuda**.



- **Barra de herramientas:** contiene distintas opciones para realizar construcciones geométricas, información de la herramienta seleccionada, y los botones para deshacer y rehacer las acciones realizadas.



- **Ventana de trabajo:** área en la que se realizarán las diferentes construcciones geométricas, que denominamos hoja de trabajo.
- **Ventana algebraica:** ofrecerá la información del proceso realizado, indicando los objetos libre, dependientes y los auxiliares que también se podrán mostrar.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DINÁMICA

- **Campo de entrada:** permite introducir expresiones, además de las opciones para seleccionar distintas funciones, caracteres o comandos.



HERRAMIENTAS DE GeoGebra

Herramientas como **Punto**, **Circunferencia**, **Segmento**, **Tangente**, entre otras, se han utilizado en las actividades propuestas en el capítulo anterior, para realizar construcciones sencillas con las que iniciar el trabajo de este curso de geometría dinámica con *GeoGebra*. El desarrollo de este segundo capítulo tendrá como objetivo conocer las distintas herramientas disponibles y las posibilidades que ofrecen.

Como apoyo a la descripción de las herramientas existentes, incluiremos ejemplos de su aplicación en distintas construcciones geométricas.

En la barra de herramientas se encuentran los siguientes bloques:

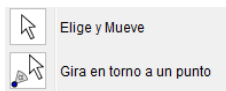


Recordemos que en todo momento existirá una herramienta seleccionada, que aparecerá con un marco de color azul, y lo estará hasta que se realice una nueva selección.

Exponemos a continuación las distintas herramientas.

HERRAMIENTAS PUNTERO

En el bloque de herramientas **Puntero** encontramos las opciones necesarias para mover los objetos que intervienen en una construcción. Las opciones que presenta son:



Elige y mueve

Permite seleccionar un objeto y desplazarlo a una nueva posición.

Será la herramienta que necesariamente habrá de elegir para mover los objetos que intervienen en una construcción.

Manteniendo pulsada la tecla **Ctrl** se podrán seleccionar varios objetos del mismo tipo, por ejemplo puntos, y por tanto se podrán desplazar de manera simultánea.

Rota en torno a un punto

Permite girar un objeto alrededor de un punto. Una vez marcado el punto basta con arrastrar el objeto que se desea girar.

HERRAMIENTAS PUNTOS

El bloque de herramientas **Puntos** ofrece distintas opciones para la creación de puntos en el plano, puntos sobre objetos previamente creados y puntos como intersección de objetos.

Las opciones que presenta son:



Punto

Al hacer clic con el ratón crea un punto en la posición en la que se encuentre el cursor. Cualquier punto puede cambiar su posición utilizando la herramienta **Desplaza** para desplazarlo, arrastrándolo a una nueva posición.

Intersección de dos objetos

Dibuja los puntos obtenidos como intersección de dos objetos.

Para que aparezcan, bastará con pulsar sobre los objetos cuya intersección queremos obtener.

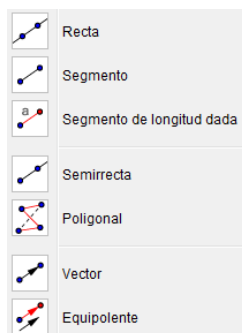
También, se puede dibujar el punto de intersección de dos objetos señalando directamente el lugar en el que se encuentra el punto de intersección, una vez seleccionada la herramienta **Nuevo punto**.

Punto medio o centro

Dibuja el punto medio de un segmento, el punto medio entre dos puntos o el centro de una circunferencia.

HERRAMIENTAS LÍNEAS

El menú de herramientas de este bloque ofrece las siguientes acciones:



Recta que pasa por dos puntos

Dibuja una recta que pasa por dos puntos.

Para modificar una recta, bastará con desplazar alguno de los puntos utilizados en la construcción o desplazar toda la recta arrastrándola.

Segmento entre dos puntos

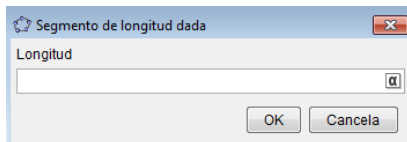
Dibuja un segmento a partir de los dos puntos correspondientes a sus extremos.

Estos puntos se pueden crear al utilizar la herramienta **Segmento** o utilizar como extremos, puntos previamente dibujados.

Segmento de longitud dada

Dibuja un segmento a partir de uno de sus extremos y de su longitud.

Una vez dibujado el punto correspondiente a un extremo, aparecerá en pantalla una ventana para introducir la longitud.



Semirrecta

Traza una semirrecta a partir de un punto inicial y otro punto que determina la dirección.

Vector

Dibuja un vector a partir de los puntos correspondientes al origen y al extremo.

Vector equipolente

Dibuja un vector utilizando como objetos iniciales el punto correspondiente al origen y un vector. El resultado será un vector equipolente al anterior (misma dirección, sentido y módulo).

HERRAMIENTAS CONSTRUCCIONES

Estas herramientas son las siguientes:



Recta perpendicular



Traza por un punto la recta perpendicular a una recta, a una semirrecta, a un segmento o a un vector.

Recta paralela



Traza por un punto la recta paralela a una recta, a una semirrecta, a un segmento o a un vector.

La recta paralela, al igual que la recta perpendicular son objetos dependientes, por lo que para modificarlas será necesario cambiar los objetos de los que depende: punto por el que se ha trazado y objeto lineal al que es paralela o perpendicular.

Mediatriz



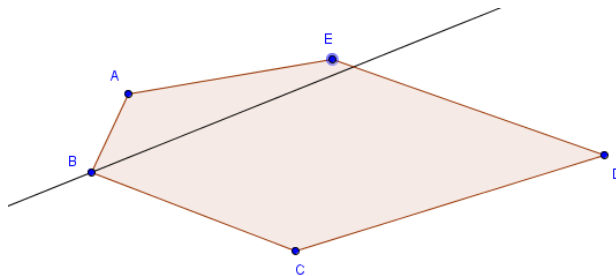
Traza la mediatriz de un segmento o la mediatriz entre dos puntos.

Bisectriz



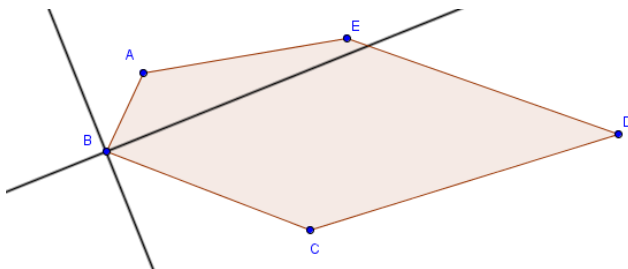
Dibuja la bisectriz de un ángulo.

Para dibujar la bisectriz hay que marcar tres puntos, el intermedio determina el vértice del ángulo.



También se puede dibujar la bisectriz marcando los lados del ángulo.

En este caso, además, dibuja la recta perpendicular por el vértice considerado.



Observamos que de esta manera se obtienen las bisectrices de todos los ángulos, que determinan las rectas $\overleftrightarrow{BA}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

Tangentes



Traza la recta tangente a una curva o función por un punto de ella, o las rectas tangentes por un punto exterior.

Lugar geométrico



Dibuja el lugar geométrico descrito por un punto, a partir del desplazamiento de otro.

HERRAMIENTAS POLÍGONOS

El menú de herramientas de este bloque ofrece las acciones siguientes:



Polígono



Dibuja un polígono cerrado a partir de los puntos seleccionados o creados como vértices. Para cerrar el polígono, basta hacer un doble clic en el último vértice o volver a pulsar sobre el primer vértice.

Polígono regular



Dibuja un polígono regular a partir de los dos puntos que determinan la longitud del lado y del número de lados del polígono. Una vez dibujados o seleccionados los dos puntos, aparecerá una ventana para introducir el número de lados del polígono.

HERRAMIENTAS CURVAS

Aparecerán las siguientes herramientas en este nuevo bloque:



Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos



Dibuja una circunferencia a partir de un punto correspondiente al centro y de otro punto que sirve para fijar el radio.

Circunferencia dados su centro y radio



Dibuja una circunferencia utilizando como objetos básicos un punto centro y una longitud. Al marcar el punto correspondiente al centro, aparece una ventana para introducir la medida correspondiente al radio.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Esta medida puede ser un valor numérico o el nombre de otro objeto dibujado previamente, como por ejemplo el nombre asignado a un segmento.

Compás

Dibuja una circunferencia a partir de un segmento o de dos puntos que determinarán el radio y de un punto que será el centro.

Circunferencia dados tres de sus puntos

Traza la circunferencia que pasa por tres puntos.

Para obtener el centro se podrá utilizar la herramienta **Punto medio o centro**.

Semicircunferencia dados dos puntos

Dibuja la semicircunferencia cuyo diámetro son los dos puntos que utiliza como objetos iniciales.

Arco de circunferencia dados su centro y dos extremos

Dibuja un arco de circunferencia a partir del centro de la circunferencia y de los puntos correspondientes a los extremos del arco.

El tercer punto no es necesario que pertenezca al arco.

Arco circular dados tres de sus puntos

Dibuja el arco de la circunferencia que pasa por tres puntos. El primero y el tercero de los puntos corresponden a los extremos del arco.

Sector-circular dados su centro y dos puntos

Dibuja un sector circular a partir del centro de la circunferencia y de los puntos correspondientes a los extremos del arco. El último punto no es necesario que pertenezca a la circunferencia, puede ser un punto del radio correspondiente al extremo del sector.

Sector circular dados tres puntos de su arco

Dibuja el sector circular que pasa por tres puntos.

El primero y el tercero de los puntos corresponden a los extremos del arco.

HERRAMIENTAS CÓNICAS

En este bloque encontramos las siguientes herramientas:



Elipse

Dibuja una elipse a partir de los puntos correspondientes a los focos y de un punto de la elipse.

Hipérbola

Análoga a la herramienta anterior, dibuja una hipérbola a partir de los puntos correspondientes a los focos y de un punto que pertenece a la hipérbola.

Parábola

Similar a las anteriores, dibuja una parábola a partir del punto correspondiente al foco y de la directriz. La directriz puede ser cualquiera de los objetos lineales reconocidos por *GeoGebra*.

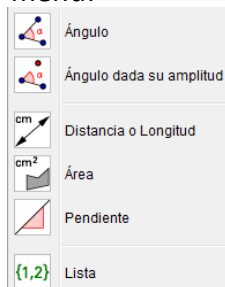
Cónica que pasa a través de cinco puntos dados

Dibuja una cónica a partir de cinco puntos.

Es evidente que dependiendo de la posición de los puntos se obtendrán las distintas cónicas.

HERRAMIENTAS MEDIDAS

En este grupo de herramientas encontramos las opciones que aparecen en el siguiente menú:



Ángulo

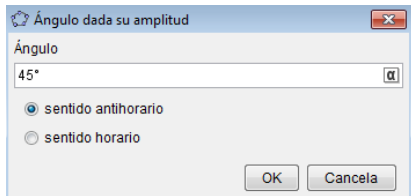
Mide el ángulo determinado por tres puntos, por dos segmentos, dos vectores o dos rectas.

Si se aplica sobre un polígono, muestra las medidas de los ángulos interiores o exteriores dependiendo del sentido en el que se han dibujado los vértices.

Si se desactiva la opción **Admite ángulos cóncavos** en la opción **Propiedades** del menú **Edita**, devolverá siempre los valores de los ángulos interiores.

Ángulo dada su amplitud

Dibuja un ángulo a partir de dos puntos que determinan un lado y de un valor numérico que determina la amplitud.



Como alternativa al valor numérico se puede introducir el nombre asignado a un ángulo previamente medido.

Distancia o longitud

Determina la distancia entre dos puntos, entre dos rectas o entre un punto y una recta. También se puede utilizar para determinar la longitud de un segmento, de una circunferencia, de una elipse o el perímetro de un polígono.

Área

Determina el área de un polígono, de una circunferencia o de una elipse.

Pendiente

Halla el valor de la pendiente de un segmento, una recta o una semirrecta.

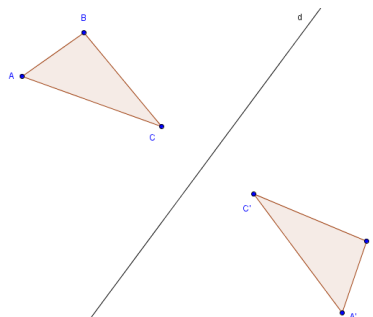
HERRAMIENTAS TRANSFORMACIONES

Las opciones que ofrece este bloque son:



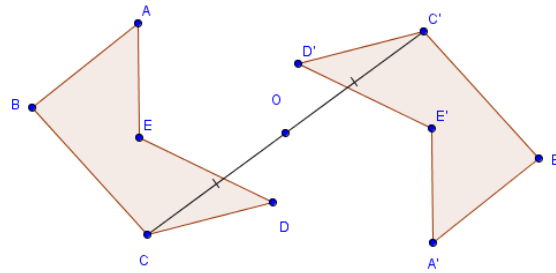
Simetría axial

Realiza una simetría axial. Devuelve el simétrico de un objeto con respecto a una recta o respecto de un objeto lineal.



Simetría central

Devuelve el simétrico de un objeto con respecto a un punto.

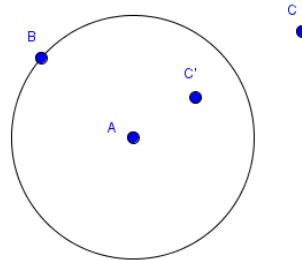


Inversión

Refleja punto en circunferencia. Dibuja el punto C' , inverso del punto C con respecto a la circunferencia.

Los puntos C y C' verifican la relación.

$$AC \times AC' = r^2$$



siendo r el radio de la circunferencia y A su centro.

Rota alrededor de un punto

Realiza un giro o rotación. Esta herramienta permite obtener la rotación de un objeto con respecto a un punto según un ángulo.

Una vez seleccionado el objeto que se desea rotar y el punto con respecto al que se rotará, aparece un cuadro para introducir el valor del ángulo de rotación.

Traslación

Realiza la traslación de un objeto con respecto a un vector.

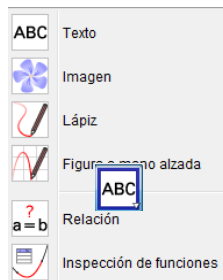
Homotecia

Devuelve el objeto que se obtiene al aplicar una homotecia, según el factor correspondiente y a partir de un punto.

Una vez seleccionado el objeto y el punto, aparecerá un cuadro de diálogo para introducir el factor de la homotecia.

HERRAMIENTAS PARA TEXTO E IMÁGENES

En este bloque encontramos las siguientes opciones:



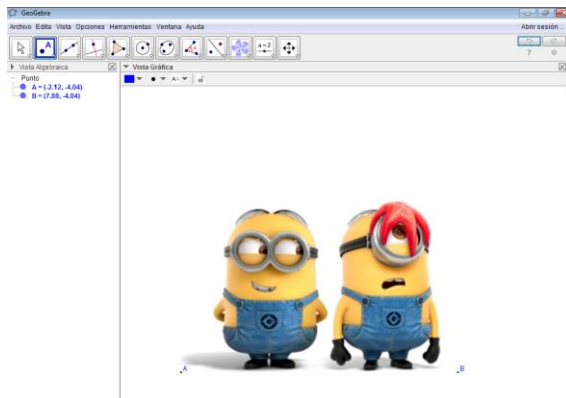
Permite introducir texto en una construcción.

Una vez seleccionada esta herramienta, al pulsar en cualquier zona de la pantalla, aparece una nueva ventana para escribir el texto que deseamos introducir.

Imagen

Permite insertar una imagen en la hoja de trabajo.

Al hacer clic en la hoja de trabajo, se fija la esquina inferior izquierda y se abrirá la ventana para encontrar la imagen que deseamos insertar.



Lápiz

Se pueden realizar dibujos en la vista grafica.

Figura a mano alzada

Por arrastre se esboza la gráfica de una función o figura determinada (triángulo, rectángulo, etc.), quedando registradas las características de dicho objeto en la vista algebraica.

Relación

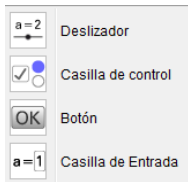
Devuelve la relación existente entre dos objetos de la construcción.

Analizador de funciones

Analiza una función en un intervalo determinado

HERRAMIENTAS DESLIZADOR Y OTROS

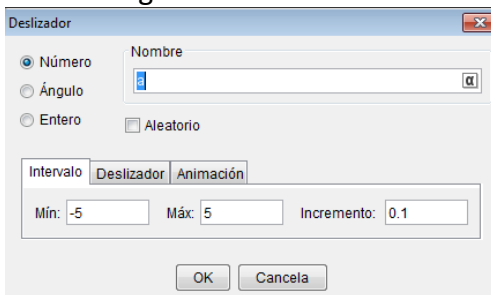
Aspecto:



De estas herramientas solo veremos:

Deslizador

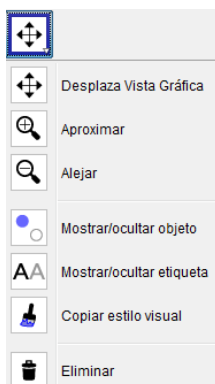
Una vez seleccionado el icono, al hacer clic sobre una zona libre de la pantalla aparece la ventana siguiente:



Permite crear una medida como referencia para un número o un ángulo ajustado al intervalo que se ha indicado. Este número “a” se lo puede asociar al parámetro de una función, cantidad de lados de un polígono, etc.

HERRAMIENTAS PARA ZOOM Y OTRAS ACCIONES

El último bloque de herramientas ofrece las siguientes acciones:



INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Desplazar vista gráfica

Se utilizará para realizar un desplazamiento de la hoja de trabajo. Una vez seleccionada la herramienta basta arrastrar la zona gráfica para desplazarla.

Aproximar **y Alejar**

Una vez seleccionadas, basta con hacer clic sobre cualquier zona de la pantalla.

También se puede realizar el zoom, utilizando la rueda del ratón para alejar o acercar la imagen.

Mostrar / Ocultar objeto

Permite ocultar o mostrar un objeto de la construcción.

Mostrar / Ocultar etiqueta

Similar a la anterior, se aplica sobre un texto.

Copiar estilo visual

Facilita copiar el estilo de un objeto para aplicar a otros objetos de la construcción.

Eliminar

Permite eliminar los objetos sobre los que se aplica.

También, podremos eliminar un objeto seleccionándolo y utilizando la tecla **Supr**.

Para eliminar varios objetos podemos trazar una marquesina (un rectángulo dibujado con la herramienta **Desplaza**) pulsando a continuación la tecla **Supr**.

Observaciones:

- Desde la **Barra de Entrada** pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la **Vista Gráfica** (y quedarán registrados en la **Vista Algebraica**), al ingresarse pulsando **Enter**.
- En el apunte se describen la mayoría de las opciones de la barra de herramientas, no se nombran aquellas que no vamos a utilizar en este curso.

Fuentes:

- Apuntes: GeoGebra 01 y GeoGebra 02. Agustín Carrillo de Albornoz Torres.
<http://ibercienciaoei.org/>
- Apunte: GeoGebraquickstart_es. Traducido por: Liliana Saidón.
<http://www.geogebra.org/>